

弯道的动量和能量系数*

许光祥

(重庆交通学院水港系; 630074)

摘 要

本文从动量系数(β)和能量系数(α)的定义出发, 根据 Engelund 弯道流速分布理论, 导出弯道的 β 和 α 的表达式. 它们均可表示为一个只与弯道宽径比 $D(B/R_c)$ 有关的系数和顺直河道的 β 或 α 的乘积, 同时讨论了采用 $\beta=\alpha=1$ 的偏差情况, 有助于提高水力计算的精度.

关键词: 弯道; 动量系数; 能量系数; 宽径比

前 言

动量和能量系数是断面平均流速代替元流速来计算断面总动量和总能量时的一个修正系数. 其定义如下:

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \int u^2 dA \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{AV^3} \int u^3 dA \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{A} \int u dA \quad (3)$$

式中, β ——动量系数; α ——能量系数; V ——断面平均流速; u ——断面任一点流速; A ——过水断面面积.

β 和 α 是断面流速沿横向和垂向分布不一致引起的, 与流速分布函数有关. 对于顺直宽浅河道 C. L. Chen 根据两种流速分布公式导出了 β 和 α 的表达式^[1]. 流速沿垂向按指数分布时

$$\beta = 1 + m^2 - \frac{2m^3}{1 + 2m} \quad (4)$$

$$\alpha = 1 + 3m^2 - \frac{8m^3}{1 + 3m} \quad (5)$$

流速沿垂向按对数分布时

$$\beta = 1 + \frac{f}{8K^2} \quad (6)$$

本文收到日期: 1994-11-18 (1995-01-17 修改回). 许光祥, 男, 29 岁, 讲师

$$\alpha = 1 + 3 \frac{f}{8K^2} - 2 \left(\frac{f}{8K^2} \right)^{1.5} \quad (7)$$

C. L. Chen 还导出

$$m = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (8)$$

代入式(6)、(7)有

$$\beta = 1 + m^2 \quad (9)$$

$$\alpha = 1 + 3m^2 - 2m^3 \quad (10)$$

式中, m ——指数流速分布公式中的指数, 常取 $m=1/6$ (光滑边壁) 或 $m=1/7$ (粗糙边壁); f ——达西-韦斯巴赫 (Darcy-Weisbach) 阻力系数; K ——卡门常数, 取 $K=0.4$ (K 可根据实测资料确定)。

目前, 在水利、航道等工程设计中, 其水力计算大多仍采用一维渐变恒定流能量方程, 能量系数 α 对计算精度有较大的影响。为了计算方便, 常取 $\alpha=1$, 这对于正常的河道断面, 偏差不大。而对于具有横向或纵向突变的断面来说, 由于流线弯曲, 已属非渐变流, 断面流速分布起了很大的变化, $\alpha=1$ 就不能代表能量系数的真实性。计算水面线的精度受到影响, 因此在计算糙率时易出现虚糙率^[2], 无法获得真实糙率, 影响其它水力计算的顺利进行。对于弯曲河道, 其特有的水流运动特性, 流速分布与顺直河道有较大不同, 其动量和能量系数的表达式及其数值大小应有所差异, 下面根据 Engelund 的弯道流速分布理论来推导弯道的 β 和 α 的表达式, 同时进行偏差讨论。

1 Engelund 弯道流速分布公式

Engelund 根据弯道水流运动理论, 将宽浅河道简化为矩形断面, 并看作二维问题, 在一定的假定条件下, 获得垂直于弯道半径方向的切向流速分布公式^[3]。

$$\begin{cases} u = u_c \sqrt{\frac{R_c}{R}} (1 - 6.5 \frac{U_*}{v_c} \eta^2) \\ \eta = \frac{h-y}{h} \end{cases} \quad (11)$$

式中, u ——弯道半径为 R 离河床 y 处的切向流速; u_c ——弯道中心线水面切向流速; R_c ——弯道中心线半径; U_* ——摩阻流速; h ——断面水深。弯道平面示意图见图 1。

2 弯道动量和能量系数表达式

令 $a=6.5U_*/u_c$, 式(11)变为

$$u = u_c \sqrt{\frac{R_c}{R}} (1 - a\eta^2) \quad (12)$$

2.1 弯道断面平均切向流速

将式(12)代入式(3)并进行积分得

$$V_b = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{R_c}{B}} \left(\sqrt{R_c + \frac{B}{2}} - \sqrt{R_c - \frac{B}{2}} \right) \left(1 - \frac{a}{3} \right) u_c$$

令 $D=B/R_c$, 则上式变为

$$V_b = \frac{2}{D} (\sqrt{1+0.5D} - \sqrt{1-0.5D}) (1 - \frac{a}{3}) u_c \quad (13)$$

式中, V_b ——弯道断面平均切向流速, 以下变量的下角标为“b”的均表示弯道变量, 凡为“s”均表示直道变量; D ——弯道河宽与中心半径之比, 简称宽径比. 式(13)明显可以看出由互不相关的两部分组成, 前部分只是 D 的函数, 后部分与 D 无关. 如令

$$\begin{cases} K_r = \frac{2}{D} (\sqrt{1+0.5D} - \sqrt{1-0.5D}) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} V_s = (1 - \frac{a}{3}) u_c \end{cases} \quad (15)$$

V_b 可写成

$$V_b = K_r V_s \quad (16)$$

将 K_r 进行整理可得如下表达式

$$K_r = 1 + \frac{(\sqrt{1+0.5D} - 1)(1 - \sqrt{0.5D})}{1 + \sqrt{1-0.25D^2}} \quad (17)$$

对于顺直河段, $R_c \rightarrow \infty$, $D \rightarrow 0$, 可得 $K_r = 1$, 所以, V_s 事实上表示 Engelund 分布公式的直道断面平均流速, 也就是说弯道平均流速可以表示为一个只与 D 有关的系数 K_r 和直道平均流速的乘积. 同时, 式(17)右边的第二项大于 0 ($0 < D \leq 2$), 即, $K_r > 1$, 所以 $V_b > V_s$.

达西——韦斯巴赫系数 f 可以写成如下关系^[4]

$$\sqrt{\frac{f}{8}} = \frac{U_*}{V_s} \quad (18)$$

将式(8)和式(15)代入上式可得

$$\frac{U_*}{(1 - \frac{6.5}{3} \frac{U_*}{u_c}) u_c} = Km = 0.4 m$$

整理上式有

$$\begin{cases} \frac{U_*}{u_c} = \frac{6m}{15 + 13m} \\ a = \frac{39m}{15 + 13m} = 3 - \frac{45}{15 + 13m} \end{cases} \quad (19)$$

代回式(15)得到 V_s 的最后表达式

$$V_s = \frac{15}{15 + 13m} u_c \quad (20)$$

2.2 弯道动量系数

将式(12)和(13)式代回式(1), 并积分有

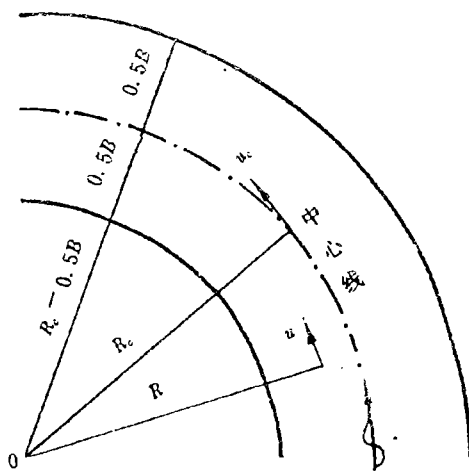


图1 弯道平面示意图

$$\beta_b = \frac{\ln \sqrt{1+0.5D} - \ln \sqrt{1-0.5D}}{\sqrt{1+0.5D} - \sqrt{1-0.5D}} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{5}a^2}{(1 - \frac{a}{3})^2} \quad (21)$$

同样令

$$\left\{ \begin{aligned} K_\beta &= \frac{\ln \sqrt{1+0.5D} - \ln \sqrt{1-0.5D}}{\sqrt{1+0.5D} - \sqrt{1-0.5D}} \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_s &= \frac{1 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{5}a^2}{(1 - \frac{a}{3})^2} = 1 + \frac{4a^2}{45(1 - \frac{a}{3})^2} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

那弯道的动量系数同样可以写成一个只与 D 有关的系数 K_β 与直道动量系数 β_s (以下证明) 的乘积. 即

$$\beta_b = K_\beta \beta_s \quad (24)$$

将式 (22) 的分子、分母分别按泰勒级数展开 ($0.5D < 1$), 有

$$K_\beta = \frac{D + \frac{1}{12}D^3 + A_1}{D + \frac{1}{64}D^3 + A_2} = 1 + \frac{13D^2}{3(64 + D^2)} + A_3 \quad (25)$$

式中, A_1 、 A_2 、 A_3 均为高阶正数余量. 对于顺直河道, $D \rightarrow 0$, 由式 (25) 可得 $K_\beta = 1$, 所以式 (23) 的 β_s 事实上表示直道的动量系数. 很明显, $K_\beta > 1$, 即 $\beta_b > \beta_s$. 将 a 的表达式代入 β_s 内, 再经整理得到 β_s 的最后表达式为:

$$\beta_s = 1 + \frac{676}{1125}m^2 = 1 + 0.609m^2 \quad (26)$$

2.3 弯道能量系数

同上, 将相应的公式代入式 (2) 得

$$\alpha_b = \frac{D^2}{8\sqrt{1-0.25D^2}(1-\sqrt{1-0.25D^2})} \cdot \frac{1-a+\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{7}a^3}{(1-\frac{a}{3})^3} \quad (27)$$

将上式右边前部分进行分母有理化等处理, 同时写成

$$\alpha_b = K_\alpha \alpha_s \quad (28)$$

的形式, 式中

$$\left\{ \begin{aligned} K_\alpha &= 1 + \frac{1 - \sqrt{1-0.25D^2}}{2\sqrt{1-0.25D^2}} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_s &= \frac{1-a+\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{7}a^3}{(1-\frac{a}{3})^3} = 1 + \frac{\frac{4}{15}a - \frac{20}{189}a^2}{(1-\frac{a}{3})^3} \end{aligned} \right. \quad (30)$$

显然, $D \rightarrow 0$ 时, $K_\alpha = 1$, 即 α_s 仍表示顺直河道的能量系数. 弯道的 α_b 仍可表示为一个只与 D 有关的系数 K_α 与直道的 α_s 的乘积. 也容易看出, $K_\alpha > 1$ ($0 < D < 2$), 即 $\alpha_b > \alpha_s$. 最后, 将 a 的表达式 (19) 代入 α_s 的表达式 (30), 并进行整理得到 α_s 的最后表达式

$$\alpha_s = 1 + \frac{676}{375}m^2 - \frac{35152}{118125}m^3$$

$$= 1 + 1.803m^2 - 0.299m^3 \quad (31)$$

3 讨 论

为了叙述方便,垂向流速按指数分布、对数分布、Engelund 公式分布的顺直河道的动量和能量系数分别表示为 β_1 、 β_2 、 β_3 和 α_1 、 α_2 、 α_3 ,并将它们与指数 m 的关系绘于图 2 中. 图 2 所示,除 $m=0$ 以外, β_1 与 β_3 在 $m=0.31$ 、 α_1 与 α_3 在 $m=0.31$ 和 α_2 与 α_3 在 $m=0.71$ 处各有一交点. 即

$$\begin{cases} \beta_3 < \beta_1 < \beta_2 & (m < 0.31) \\ \beta_1 < \beta_3 < \beta_2 & (m > 0.31) \\ \alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2 & (m < 0.31) \\ \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2 & (0.31 < m < 0.71) \\ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 & (m > 0.71) \end{cases}$$

和

通常,对于光滑边壁 $m=1/6$ 及粗糙边壁 $m=1/7$,均小于 0.31. 现将两个 m 值的 β 和 α 及与其 $\beta=\alpha=1$ 的偏差列于表 1.

表 1 β 和 α 值及其与 1 的偏差

β_1 α m	1/6		1/7	
β_1	1.021	2.1%	1.016	1.6%
β_2	1.028	2.8%	1.020	2.0%
β_3	1.017	1.7%	1.012	1.2%
α_1	1.059	5.9%	1.045	4.5%
α_2	1.074	7.4%	1.055	5.5%
α_3	1.049	4.9%	1.036	3.6%

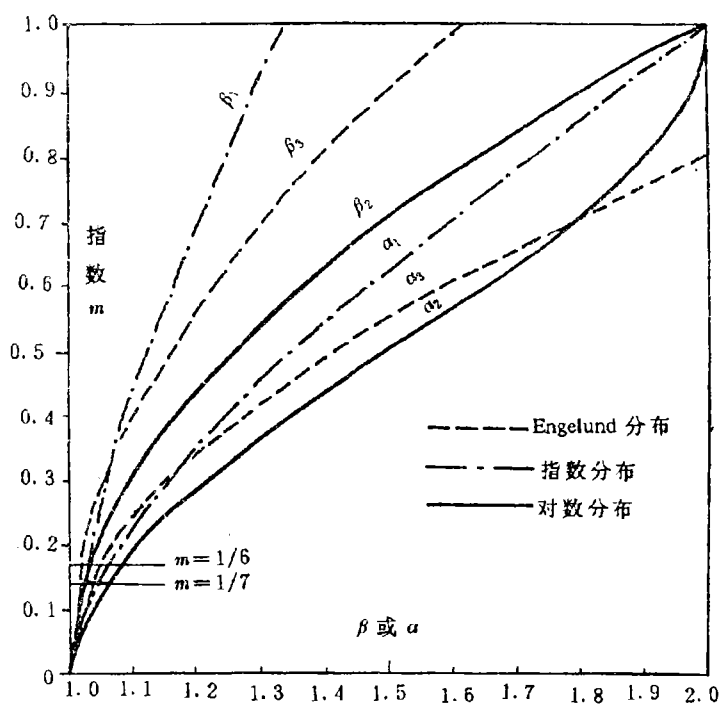
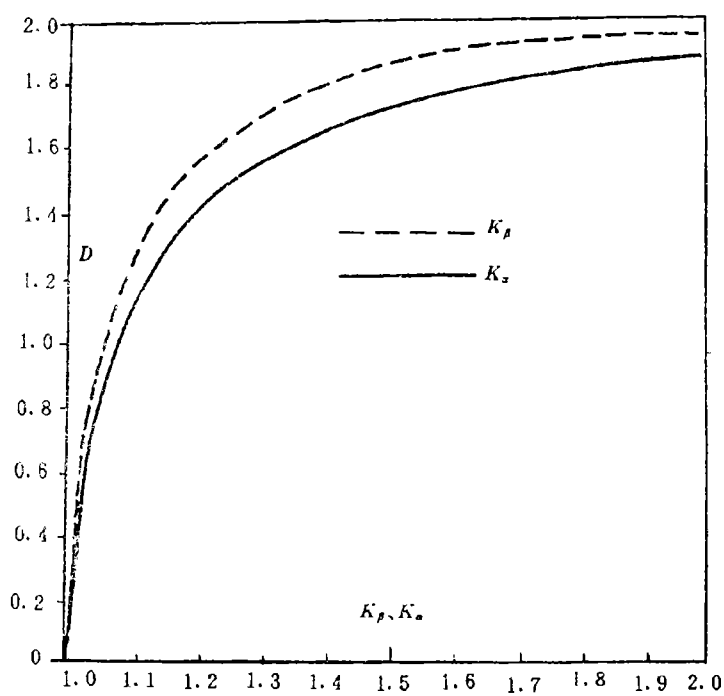
表 1 比较可见, β_3 、 α_3 的偏差最小,其余的偏差也均小于 10% (最大偏差 7.4%),可以认为取 $\beta=\alpha=1$ 的偏差不大. 而对于弯曲河道的 β_s 和 α_s ,由于它们大于顺直河道的 β_s 和 α_s ,其偏差会增大.

图 3 是 K_β 、 K_α 与 D 的关系曲线. 当 $D < 1.0$ 时,曲线变化较为缓慢 $K_\alpha < 1.1$,而当 $D > 1.0$ 时,曲线变化较激烈 $K_\alpha > 1.1$,当 $D < 1.2$ 时, $K_\beta < 1.1$. 下面列出弯道取 $m=1/6$ 和 $m=1/7$ 时的 β 、 α 与 $\beta=\alpha=1$ 的偏差为 5%~40% 的 D 值.

表 2 弯曲河道几种偏差的 D 值

β 偏差 (%)	5	10	20	30	40
$m=1/6$	0.75	1.15	1.50	1.70	1.75
$m=1/7$	0.80	1.20	1.55	1.75	1.80
α 偏差 (%)	5	10	20	30	40
$m=1/6$	0.15	0.80	1.25	1.45	1.60
$m=1/7$	0.40	0.95	1.30	1.50	1.65

由表 2 可见, β 和 α 偏差 5% 的 D 值分别为 0.75 和 0.15,偏差 10% 时为 1.15 和 0.80. 在采用一维恒定流能量方程计算水面线或糙率时, $D < 0.8$ 可以不考虑弯道 α 的影响,如果 $D > 0.8$ 时仍不考虑,会引起较大偏差.

图2 β 和 α 与 m 的关系 (直道)图3 K_β 和 K_α 与宽径比 D 的关系

4 结 语

根据以上的推导、分析和比较,可归纳如下:

1. 导出了弯道 β 和 α 的表达式,它们均可表示为一个只与宽径比有关的大于 1 的系数和只与指数 m 有关的直道 β 或 α 的乘积,弯道的 β 和 α 大于直道的 β 和 α 。
2. 对于顺直正常河道,流速沿垂向按指数、对数、Engelund 公式分布相应的 β 、 α 值与 1 的偏差不大,均小于 10%,其中第三者最小。
3. 宽径比 $D=0.8$ 时可以作为考虑弯道 α 影响与否的临界值,小于此值时可不考虑。

参 考 文 献

- 1 Chenglung Chen. Momentum and Energy Coefficients Based on Power-Law Velocity Profile, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1992, 118 (11)
- 2 许光祥,程昌华. 虚糙率的成因分析. 水运工程, 1994, (7)
- 3 钱宁,张仁,周志德. 河床演变学. 北京:科学出版社, 1987
- 4 钱宁,万兆惠. 泥沙运动力学. 北京:科学出版社, 1983

Momentum and Energy Coefficients for River Curve

Xu Guangxiang

(Chongqing Institute of Communications)

Abstract

Based on the definition of momentum coefficient (β) and energy coefficient (α), this paper derives expressions for β and α from Engelund's formula of the velocity distribution for curve. They can be expressed as product of the parameter only related to rate of width B to radius R , and β or α for straight channel. The results of β and α are discussed. This paper is of practical significance to improve accuracy of hydraulic calculation.

Key words: curve; momentum coefficient; energy coefficient; rate of width to radius