

水中气泡运动规律的研究

刘 胜, 杨成渝, 王平义

(重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074)

摘要:通过对水下气泡的受力分析, 建立气泡在水中运动的微分方程, 通过数值方法进行简化求解, 得出用水深表示速度的 $\omega(h)$ 解析关系式, 用以描述气泡运动包括加速段的整个过程. 气泡急剧加速上升阶段很短, 与直径有关; 上升的最终速度与气泡的直径有关, 与水深无关; 接近恒速阶段的起始速度与水深有密切关系.

关键词: 气泡; 近恒速; 加速段

中图分类号: TV131.4

文献标识码: A

文章编号: 1001-716X(2007)03-0136-04

Study on the Law of Bubble Movement in Water

LIU Sheng, YANG Cheng-yu, WANG Ping-yi

(School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Through the analysis of the air bubble stress under water, the differential equation of air bubble movement in water was established. The simplification was carried out through the value method, and the analytic equation of $\omega(h)$, with water depth expressing speed, was put forward to describe the whole process of air bubble movement including the acceleration phase. The severe acceleration phase is short which is connected with diameter, and the final uplifted speed is also connected with dia, but has nothing to do with water depth which is contrary to the start speed of approximate constant phase.

Key words: air bubble; near constant speed; accelerates

气泡广泛存在于化工、生物、医药、动力设备、核反应堆、航天、热能等领域. 显然, 气泡运动规律对许多工程问题也就有着重要的影响, 如船舶发动机水下排气会造成螺旋桨和润滑轴承的气蚀; 利用气泡加速反应装置中的物质混合, 热量交换及化学反应过程; 防止水路和港口结冰; 尤其在水处理方面, 曝气、气浮及气选等工艺的处理能耗和处理效率与气泡运动特性密切相关等等. 因而对气泡运动规律的研究对生产实际、流体力学及两相流动的发展都有着重要的意义. 在前人的基础上对水中气泡进行了研究, 给出包括加速段过程的完整公式描述. 虽然得到的加速段很短, 但在研究浅池曝气及其它模型实验分析时很有价值.

目前就气泡上升速度的研究来看, Stokes 及 Mendelson 公式给出了终速度的解析表达式; Peebles 和 Garber 根据试验得到终速度的经验公式; 他们都

没有对气泡在水中的运动全过程给以全面的表述, 即对气泡的加速阶段没有公式表述. 蒋炎坤^[1]也只是通过试验数据拟和给出了气泡加速阶段粗略的描述. 程文^[3]通过实验数据描绘了气泡终速度与气泡直径的关系曲线, 得到在某一直径时, 气泡终速度有极值. 基于牛顿运动定律进行分析, 对气泡包括加速段的整个运动过程, 给出了公式及其数值求解和图形描述.

1 气泡运动的受力分析

研究气泡运动特性, 首先要对其进行受力分析, 然后建立方程求解. 在这只研究静水中气泡沿垂线方向上的运动规律, 假定气泡周围的水是静止的, 气泡直径 $d \leq 3 \text{ mm}$, 故可以认为气泡在运动过程中为很规则的球形. 水中作用在气泡上的力主要有以下 3 种, 见图 1.

收稿日期: 2006-02-28; 修订日期: 2006-03-27

作者简介: 刘 胜(1981-), 男, 辽宁昌图人, 硕士研究生, 主要从事港口、海岸及近海工程.

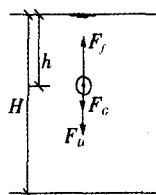


图1 水作用在气泡上的力

图1中各参数意义如下:

1) 重力 F_g , $F_g = mg = \rho_g gV$.

m 为气泡的质量, $m = 28.966 \text{ n}$; g 为重力加速度取 9.8 m/s^2 ; V 为气泡在水中的体积; ρ_g 为气泡内气体的密度取空气 1.293 kg/m^3 ;

2) 浮力 F_f , $F_f = \rho_l gV$;

ρ_l 为水的密度, $\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$.

3) 粘性阻力 F_v , 水对气泡的阻力, 由固体颗粒在水中沉降阻力换算得 $F_v = C_D \rho_l f \omega^2 / 2$. C_D 为阻力系数, 与水的性质及气泡的形状和速度有关. f 为气泡投影面积, $f = \pi d^2 / 4$, d 是气泡在水中的直径; ω 为气泡沿垂线方向上的速度.

所研究的气泡为单个气泡, 不用考虑相邻气泡尾流作用力的影响.

2 物理方程的建立及求解

根据以上受力分析, 结合泥沙沉降速度原理, 建立重力方向上的物理方程:

$$m \frac{d\omega}{dt} = F_v - F_g - C_D \rho_l f \omega^2 / 2 \quad (1)$$

2.1 层流区时

气泡很小, 直径 $d \leq 0.2 \text{ mm}^{[3]}$ 时, 可假定流体绕气泡流动, 并不发生分离现象, 气泡在水中运动时成球形不变, 则有 $C_D = 24/Re$, $Re = \omega d / \nu$, 代入式(1)得:

$$m \frac{d\omega}{dt} = F_v - F_g - 3\pi d \mu \omega \quad (2)$$

其中水的粘性系数 $\mu = 0.001137 \text{ (Pa} \cdot \text{s)}^{[5]}$

令加速度为零时, 由斯托克斯定律就可得到公式^[6]:

$$\omega = \frac{1}{18} \cdot \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l} \cdot \frac{g d^2}{\nu} \quad (3)$$

由克拉伯龙方程 $PV = nRT$, 气泡所受压强 $p = \rho_l gh + p_0$, 气泡内外压强相等得到:

$$V = nRT / [\rho_l g(h + 10.31)] \quad (4)$$

式中: h 为气泡到水面的距离(从球心算起); p_0 为大气压强, 换算为 10.31 m 水柱; n 为气体物质量; R 为理想气体常数, 取标态下 8.314 ; T 为开式温度, 标态取 293.15 . 由公式(2) 还可以得到水中气泡直径 d 与 h 的关系:

$$\frac{1}{6} \pi d^3 = nRT / [\rho_l g(h + 10.31)] \quad (5)$$

为计算方便令:

$$(\rho_l - \rho_g) nRT / (\rho_l m) = (\rho_l - \rho_g) RT / (\rho_l 28.966) = N \quad (6a)$$

$$\frac{(\rho_l - \rho_g) g \times 10.31 \pi d_0^3}{m \times 6} = N \quad (6b)$$

$$k = 3\pi d_0 \mu / m \quad (7)$$

式(7) 中的 d_0 是气泡上升到水面时的直径. 通过试验观察, 气泡从针孔产生时, 近乎于弹出, 则经简化求解微分方程(1) 解得:

$$\omega = \frac{N}{k(h + 10.31)} \left[1 - \left(\frac{h + 10.31}{H + 10.31} \right)^{k^2/N} \right] \quad (8)$$

将式(5)、(6) 代入式(8) 得:

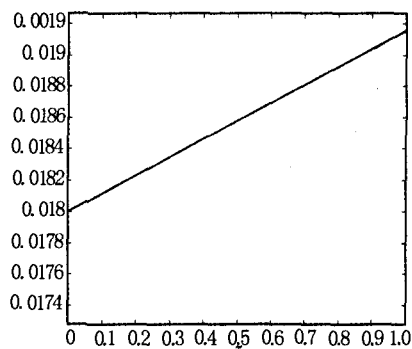
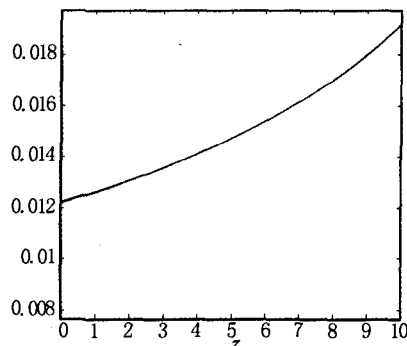
$$\omega = \frac{\rho_l - \rho_g}{18\mu d} g \frac{10.31}{h + 10.31} d_0^3 \times \left[1 - \left(\frac{h + 10.31}{H + 10.31} \right)^{(hk)^2/N} \right] = \frac{1}{18} \frac{\rho_l - \rho_g}{\mu} g d^2 \left[1 - \left(\frac{h + 10.31}{H + 10.31} \right)^{(hk)^2/N} \right] \quad (9)$$

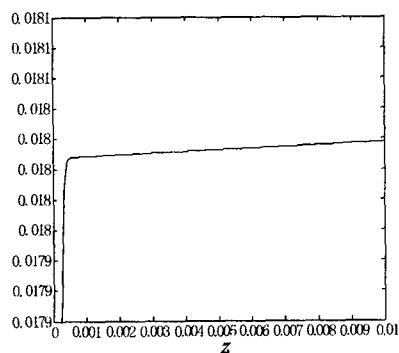
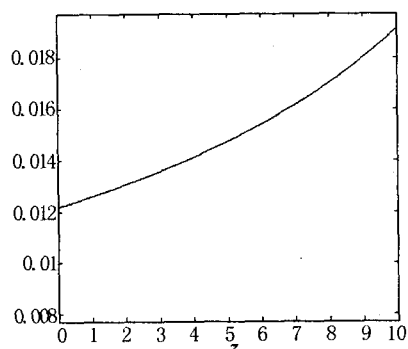
层流时, 一般 $d < 0.2 \text{ mm}$, 可知 $k > 395$. 式(9) 就近似变成了斯托克斯公式(3).

为方便阅读分析, 定义 $z = H - h$. z 是以水底为零点算起, 气泡的位置高度. 经整理式(9) 变换为:

$$\omega = \frac{1}{18} \frac{\rho_l - \rho_g}{\mu} g \left(\frac{10.31}{H + 10.31 - z} \right)^{2/3} \times d_0^2 \left[1 - \left(\frac{H + 10.31 - z}{H + 10.31} \right)^{(hk)^2/N} \right] \quad (10)$$

以 $d_0 = 0.2 \text{ mm}$ 为例, 得到不同 H 的速度曲线如图2 ~ 图5.

图2 $H = 1 \text{ m}$ 时 $\omega(z)$ 曲线图3 $H = 10 \text{ m}$ 时 $\omega(z)$ 曲线

图4 $H = 1 \text{ m}$ $\omega(z)$ 曲线(取0~0.01 m段)图5 $H = 10 \text{ m}$ (公式(3)) $\omega(z)$ 曲线

由 $H = 10 \text{ m}$ 图及公式(2)分析得,当 $H = 10 \text{ m}$ 时,显然浮力将要增大一倍,故相应的速度要增加 $2^{2/3} - 1$ 约0.6倍。

2.2 紊流区时($300 < Re < 4000$):

一般采用 Mendelson 经验公式

$$\mu_{\infty} = \left(\frac{2 \cdot 14\sigma}{d\rho_l} + 0.505gd \right)^{1/2} \quad (11)$$

式中: σ 为水的表面张力,纯水 20°C 时,取值 72.75 dynes/cm 。

鉴于当 $Re > 1000$ 时,阻力系数 $C_D = 0.45^{[6]}$ 不变,可建立物理方程(1)

令:

$$K = C_D \rho_l \cdot 1/8 \cdot \pi d^2 m^{-1} = C_D \rho_l \left[\frac{6 \times 22.4 \times 10^{-3}}{8} \right] d^{-1} / 28.966 \quad (12)$$

将式(6)、式(12)代入式(1)得:

$$h''(t) - \frac{K}{(h + 10.31)^{2/3}} \omega^2 + \frac{N}{h + 10.31} = 0 \quad (13)$$

解得:

$$\omega = \exp[3K(h + 10.31)^{1/3}] \times \sqrt{\int_h^{H-d/2} \frac{2N}{h + 10.31} \exp[-6K(h + 10.31)^{1/3}] dh} \quad (14)$$

由积分性质得:

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \left[\frac{(h + 10.31)^{2/3}}{2K} + \frac{(h + 10.31)^{1/3}}{6K^2} + \right. \right. \\ & \frac{1}{36K^3} - \frac{1}{2K} \exp(-6K((H + 10.31)^{1/3} - \\ & (h + 10.31)^{1/3})) (H + 10.31)^{2/3} - \frac{1}{6K^2} \times \\ & (H + 10.31)^{1/3} \exp(-6K((H + 10.31)^{1/3} - \\ & (h + 10.31)^{1/3})) - \frac{1}{36K^3} \cdot \\ & \left. \exp(-6K((H + 10.31)^{1/3} - (h + 10.31)^{1/3})) \right] \cdot \\ & \left. \frac{2N}{h' + 10.31} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

其中: $h < h' < H$,一般 K 都很大,大于300,则约去微小项及物理数学分析得:

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \left[\frac{(h + 10.31)^{2/3}}{2K} - \right. \right. \\ & \frac{1}{2K} \exp(-6K((H + 10.31)^{1/3} - (h + 10.31)^{1/3})) \times \\ & (H + 10.31)^{2/3} \left. \right] \times \frac{2N}{h + 10.31} \left. \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

当 h 在近恒速段时, K 很大,显然上式中括号中的第二项可略去,就变成:

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{K(h + 10.31)^{1/3}}} \quad (17)$$

由式(5)、式(12)可将式(17)转化为^[6]:

$$\omega = 1.72 \sqrt{\frac{\gamma_l - \gamma_s}{\gamma_l} gd} \quad (18)$$

为方便阅读分析,定义 $z = H - h$. z 是以水底为零点算起,气泡的位置高度.这样公式(16)变换为

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \left[\frac{(H - z + 10.31)^{2/3}}{2K} - \right. \right. \\ & \frac{1}{2K} \exp(-6K((H + 10.31)^{1/3} - \\ & (H - z + 10.31)^{1/3})) \times \\ & (H + 10.31)^{2/3} \left. \right] \times \frac{2N}{H - z + 10.31} \left. \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

现在我们来解释一下公式(14)转化成公式(16)的推导过程.

公式(14)中的积分式在现在的高等数学中是得不到解的;用数值分析的方法求解,由于 K 值很大,收敛困难,显然运算起来也很困难.

一般加速段 $H - h < 0.04 \text{ m}$

取 $h' = h$ 或 H 时,最大相对误差

$$e = \left[\left(\frac{1}{h + 10.31} \right)^{1/2} - \left(\frac{1}{H + 10.31} \right)^{1/2} \right]$$

$$\left(\frac{1}{h + 10.31} \right)^{-1/2} = \frac{1}{(H + 10.31)^{1/2}} \times \frac{H - h}{[(H + 10.31)^{1/2} + (h + 10.31)^{1/2}]} < 0.002$$

若取 $h' = (h + H)/2$ 时,最大相对误差 $e < 0.001$.

由上述数学分析可知,在加速段误差很小可忽略,而在近恒速时的误差却很大不能忽略.

当然,由物理分析得到的实际加速度不可能为零,且应该是大于零的,也就是说,式(17)的结果小于真实值,而式(16)的结果由式(15)分析可知是大于真实值的. 式(16)、(17)近恒速速度误差为 $(h + 10.31)^{-(1/3)}/(6K^2)$, K 一般 > 300 , 故其数量级为 10^{-6} . 因而令 $h' = h$ 是能够满足一般工程误差要求的.

为方便计算,继续简化式(15),由于 $(h + 10.31)^{-(1/3)}/(6K^2)$ 已经很小,故可以把小于该项的其它项省略,即得到式(16). 现以 $d_0 = 2 \text{ mm}$ 为例作不同 H 的函数 $w(z)$ 曲线图(图6、图7).

由式(17)计算的曲线图如图8、图9. 由 $H = 10 \text{ m}$ 图及式(17)分析得,当 $H = 10 \text{ m}$ 时,显然浮力将增大一倍,故相应的速度要增加 $2^{1/6} - 1$ 约 0.12 倍.

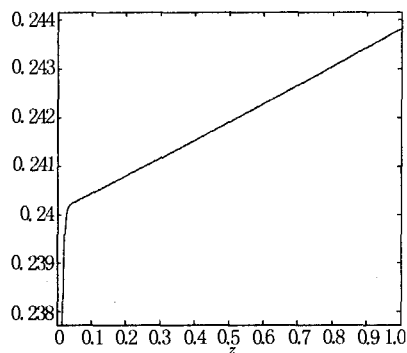


图6 $H = 1 \text{ m}$ 时 $w(z)$ 曲线

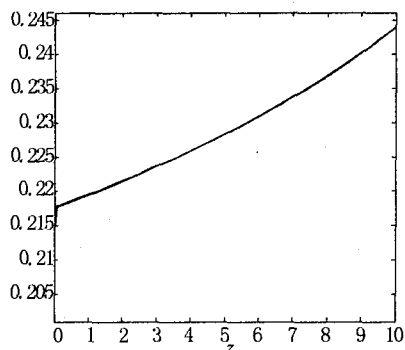


图7 $H = 10 \text{ m}$ 时 $w(z)$ 曲线

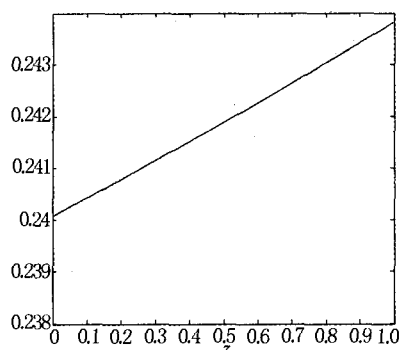


图8 $H = 1 \text{ m}$ 时 $\omega(z)$ 曲线

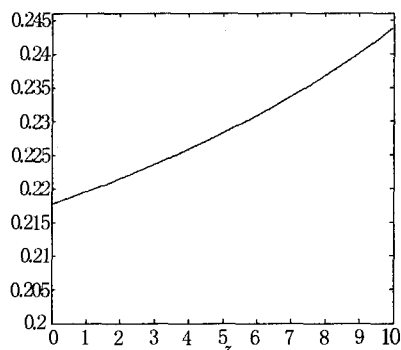


图9 $H = 10 \text{ m}$ 时 $\omega(z)$ 曲线

2.3 过渡区时 ($1 < Re < 300$):

一般采用下面终速度公式^[2]

$$\mu_{\infty}^{1.4} = \frac{1}{13.9} \frac{(\rho_l - \rho_g)gd^{1.6}}{\rho_l^{0.4}\mu_l^{0.6}} \quad (20)$$

由于该段阻力系数 C_D 为关于速度的函数,其关系非常复杂,目前还未能找到合适的方法得到它的解析解.

3 实验现象与分析

以上推导都是建立在比较理想状态下的,事实上试验中不可不考虑边壁的影响. 实验采用 0.5 m 高的玻璃量筒,医用 0.4 mm 、 0.8 mm 、 1.2 mm 针头,为得到较小的气泡,将细铜丝插入 0.4 mm 的针头使针孔更小,通过高速摄影机每秒 25 帧图像记录气泡运动过程,并以 0.1 倍速播放观察. 观察发现,气泡在脱离底壁开始运动时,由于底壁(针孔)对其的粘结力作用,其形状不是很圆的,成灯泡形,故而其速度上升很快且有达到极大值,然后减速上升到恒定,该段较短大约 6 cm ,气泡直径 d 越大越明显,气泡直径 d 很小时,由于表面张力起绝对性控制作用,变形可不必考虑. 然后速度均恒,但因加速度始终是 > 0 的,故而速度其实是很缓慢增大,并非恒等不变的,正如本文的计算图形 $H = 10 \text{ m}$ 时就明显的看

(下转第 152 页)

- 化(土地退化)防治研究[M]. 北京:中国环境科学出版社,1998.
- [2] 王涛,吴薇,薛娴,等. 近50年来中国北方沙漠化土地的时空演化[J]. 地理学报, 2004, 59(2):203-212.
- [3] 钱正安,宋敏红,李万元. 近50年来中国北方沙尘暴的分布及变化趋势分析[J]. 中国沙漠,2002, 22(2):106-111.
- [4] Wang Tao. Progress in sandy desertification research of China[J]. Journal of Geographical Sciences, 2004, 14(4):387-400.
- [5] 薛廉清. 水文地质环境在土地沙漠化发展过程中的控制[J]. 甘肃水利水电技术,2005,41(2):183-194.
- [6] 葛肖虹,任收麦. 中国西部治理沙漠化的战略思考与建议[J]. 第四纪研究,2005,25(4):484-489.
- [7] 宋宗水. 解决西北地区干旱、沙漠化问题的对策[J]. 中国农业资源与区划,2001,22(2):12-15.
- [8] 任仓钰. 毛乌素沙地沙漠化原因探讨[J]. 地质灾害与环境保护, 2002, 13(2):30-31.
- [9] 肖盛燮. 生态环境灾变链式理论原创结构梗概[J]. 岩石力学与工程学报, 2006,25[S](1):2 593-2 602.
- [10] 肖盛燮,冯玉涛,王肇慧,等. 灾变链式阶段的演化形态特征[J]. 岩石力学与工程学报, 2006,25[S](1):2 629-2 633.
- [11] 文传甲. 论大气灾害链[J]. 灾害学,1994,9(3):1-6.
- [12] 吴瑾冰,郭安红. 华北及临近地区的巨灾链[J]. 自然灾害学报,2001,10(1):12-16.
- [13] 吴瑾冰. 滇、桂、粤、闽、台灾害链讨论[J]. 灾害学, 2002,17(2):82-87.
- [14] 田连权. 西南山地灾链的区域分析[J]. 山地研究, 1995,13(2):116-120.
- [15] 王文俊,唐晓春,王建力. 灾害地貌链及其临界过程初探[J]. 灾害学,2000,15(1):41-46.
- [16] 傅敏宁,邹俊杰,周国强. 江西省自然灾害链实例分析及综合减灾对策[J]. 自然灾害学报,2004,13(3):101-103.
- [17] 倪晋仁,李秀霞,薛安,等. 泥沙灾害链及其在灾害过程规律研究中的应用[J]. 自然灾害学报,2004,13(5):1-9.
- [18] 李英奎,倪晋仁,李秀霞,等. 泥沙灾害与泥沙灾害链的分类分级[J]. 自然灾害学报, 2005,14(1):15-23.
- [19] 文传甲. 广义灾害、灾害链及其防治探讨[J]. 灾害学,2000,15(4):13-18.
- [20] 魏江春. 地衣、真菌和菌物的研究进展[J]. 生物学通报,1998,34(12):1-5.

(上接第139页)

出. 当气泡很小时,其上升可认为是直线上升;一般气泡成螺旋状上升,是因其在水中运动时受到挤压而不断变形和颤动的缘故;当气泡直径 $>4\text{ mm}$ 时明显可以看出气泡成扁的椭圆,且运动过程中不断的变形(有颤抖),其速度较 3 mm 气泡要小.

4 结 论

经过理论分析得:

1) 水下气泡运动过程是急剧加速,加速度逐渐减小,直至近视为零.

2) 以往前人认为气泡的终速度是相对的,只能认为是近恒速,当 $H \gg 10.31$ 时,速度曲线就很明显(见图3和图5).

3) 速度达到近恒速阶段,加速度又有微小回升,最大水深 H 越大越为明显.

4) 同一直径气泡到达水面时的速度不管最大水深 H 多大都相等,气泡直径越大速度越快.

5) 加速段的大小很小,且与气泡直径大小有明显关系,层流区时约为 3 d ,紊流区时约 30 d ,显然紊流区时比较明显,这时加速过程通过实验较容易得到.

6) 由试验得大直径气泡上升的速度是有界的,

当 $d > 2\text{ mm}$ 时,气泡上升的速度都近于相同,近于 0.4 m/s .

文中所有曲线图的纵坐标均表示气泡上升速度(m/s),横坐标均表示气泡的上升高度(m).

参考文献:

- [1] 蒋炎坤. 水下排气气泡运动特性及其数值模拟研究[J]. 华中科技大学学报,2004,32(10):49-50.
- [2] 李小明. 气泡在不同液体中上升速度的实验研究[J]. 西安交通大学学报,2003,37(9):972.
- [3] 程文. 水中气泡上升速度的实验研究[J]. 西安理工大学学报,2000,16(1):57-60.
- [4] Mendelson H D. The prediction of bubble terminal velocities from wave theory [J]. AICHE Journal,1967,13(2):250-252.
- [5] 卢作伟. 气泡在液体中运动过程的数值模拟[J]. 计算力学学报,1997,(5):125-132.
- [6] 钱宁,万兆惠. 泥沙运动力学[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [7] 吴持恭. 水力学[M]. 北京:高等教育出版社,1996.
- [8] 许保玖. 当代给水与废水处理原理[M]. 北京:高等教育出版社,1990.