

# 数学证明中的逆向思维教学法

王 斌

(重庆交通学院 数学与应用数学研究所 重庆 400074)

**摘要:**笔者在文中提出了数学证明的逆向思维教学法概念,剖析了数学证明模式的逻辑结构,分析了数学逆向思维训练与能力培养的辩证关系,列举了若干训练和培养数学逆向思维的典型实例。

**关键词:**高等数学;数学思维;逆向思维;能力培养

**中图分类号:**013 **文献标识码:**B **文章编号:**1001-716X(2005)01-0158-03

众所周知,高等数学的教学目的,不仅仅是让学生掌握微积分的基本概念,会求若干函数的导数或积分,而是在掌握这些基本知识和技能的同时,逐步培养一定的数学思维和运用数学方法解决实际问题的能力.如何训练和培养学生的数学思维,不断提高运用数学知识解决实际问题的能力呢?不少数学教育工作者做了许多有益的探索.本文,仅就高等数学教学过程中,对于如何进行数学证明题的教学,提出了数学证明的逆向思维教学法概念,探索了培养和训练学生逆向思维能力的有效途径.实践证明,实施逆向思维教学法,是培养学生数学思维和能力的行之有效的教学方法.

## 1 数学证明模式的逻辑结构剖析

在高等数学教材中,有许多基本定理和性质的论述和证明,这些定理和性质的论述与证明的逻辑结构,概括起来,主要有两种模式.

第一种逻辑结构,首先给出命题的结论以及所需要的全部条件,然后从所给的条件出发,根据有关的定义和已经证明过的定理或性质,按照逻辑推理方法,一步一步地展示证明的全过程,最终得出命题的结论.这种证明程序的优点是,首先它让读者对定理或性质的条件与结论有一个完整的认识,这能有效地引起学生的注意力和兴趣,能有效地让学生带着这样的问题去思索、去寻求证明结论的思想,方法和技巧;其次,这种证明模式的推理过程目的明确思路清晰,层次分明,从而有效地引导学生一步一步地进行严密地逻辑推理,最终达到胜利的彼岸.这种证

明模式,由于目的明确,思路清晰,易于被学生所接受.这种证明模式的不足是,在证明过程中,有些学生,他们往往想知道为什么要这么证明?您是怎么想出来的?还有其它的证明方法吗?等等.由于受到教材篇幅的限制,不可能把这些问题都讲得清清楚楚.

第二种逻辑结构,首先从某一具体问题或某一已知结论出发,进行一系列地分析和推导,在推理的过程中,根据逻辑推理所需要的前提,作出满足这些前提的若干假设,然后根据这些假设再进行一步一步地逻辑推理,逐渐向命题的结论靠近,最后才归纳性地给出该定理或性质的条件和结论.这种证明模式的优点是,问题的引入十分自然,能有效地让读者感到数学来自于客观实际的需要,而在证明的过程中,其分析和推理顺理成章,符合人的认识规律,容易被学生接受.这种证明模式的最大的特点是,能激发学生观察和分析问题的积极性,对培养学生建立数学模型的能力很有好处.但是,这种证明模式的明显不足是,定理的条件和结论是在证明过程的最后阶段才归纳得出来的,这使得部分学生对命题条件和结论的完整性往往认识不足,对逻辑推理的目的不够明确,其推导过程往往是在学生不知不觉的情况下进行的,所以不容易引起学生的重视.这种证明模式,其分析和推导的过程有时比较长,这给教学带来一定的困难.

在现行的<高等数学>教材中,上述两种命题证明的逻辑结构都在使用,但以第一种模式居多.对

收稿日期:2004-03-15

作者简介:王斌(1962-),男,四川大竹人,副教授,主要从事高等数学,概率统计,数学建模,教育理论,教育管理等方面的研究.

于<高等数学>的教师来讲,这些定理或性质的论述与证明,无论教材采用的是什么模式,都应该着重培养学生的数学思维能力.也就是讲,在这些定理或性质的讲述过程中,不仅仅让学生逐渐理解并掌握相关的数学知识,而且通过对这些定理或性质的讲解、分析、归纳和逻辑推理,不断培养学生的数学思维,从而不断地提高学生的思维能力,进而培养学生的创造性.

## 2 数学逆向思维分析的逻辑结构

数学逆向思维教学法,就是在逻辑推理教学过程中,首先从问题的结论即逻辑结果出发,引导学生作一系列地逆向分析,找出能直接推出逻辑结果的各种中间结论,然后再引导学生把这些中间结论与问题的已知条件有机联系起来,从而让学生分析归纳出一条从已知条件到逻辑结果的有效证明途径.

## 3 数学逆向思维训练与能力培养的辨证关系

在<高等数学>教学中,有许多有关数学证明的教学,这是学生感到困难的教学环节,有些学生一看见证明题就头疼,不知道如何去观察和分析问题的条件与结论,不知道如何去寻找条件与结论之间的联系,不知道怎样证是正确的,不知道怎样进行证明过程的论述,甚至不知道怎样才算证明完毕.这些现象充分说明学生十分缺乏必要的数学思维和逻辑推理能力.

培养和提高学生的数学素质与能力,是一个长期而艰巨的过程,不是几天或者通过几个证明题就能完成的.然而,正是那些叫人头疼的证明题,恰好是我们培养和训练学生数学思维能力和逻辑推理能力的最佳教学环节.而突破这一困难环节的切入点,数学逆向思维分析法就是一种行之有效的方法.

在数学教学过程中,特别是在基本定理或性质的推理过程中,在证明题的逻辑推理过程中,教师应有计划,有步骤地引导学生,从逻辑结果出发,通过一系列的逆向分析,着重讲述逻辑推理证明的逆向思维方法和要领,通过对已学习过的相关知识的回顾和搜索,千方百计地把逻辑结果,中间结论与已知条件有机地联系起来,从而找出一条链式证明路径.经过反复多次地训练和培养,我们就能逐渐地培养起学生的逆向思维能力,从而不断提高学生分析问题和解决问题的能力.

下面,举几个数学逆向思维分析教学的典型实例.

## 4 证明数列极限的逆向思维教学法

例1:证明数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 9^n} = 9$$

多数同学初看这个题目,都会感到十分茫然,不知如何下手.我们可按照下列程序组织教学,通过对结论的一系列逆向分析,培养和训练学生的逆向思维,最终证明该数列极限:

1. 启发逆向思维:怎么来证明该极限等于9呢?首先,教师应明确指出,要直接证明该极限等于9,我们没有任何现成公式可以套用,因此,只能用间接方法来证明该极限;然后,教师应及时引导学生回顾判断极限存在性的两个重要准则,并且启发:我们是否可以利用极限存在的两个准则来证明这个极限呢?为此,提醒学生:我们可先用第一个准则,即夹逼准则试一试,如果不行再换成第二个准则,即单调有界准则试试.这样,就让学生带着这样一个问题把要证明的极限与极限存在准则有机地联系在一起.这是培养和训练学生逆向思维的第一步.

2. 逆向思维转化:为了使证明过程简洁与规范,教师应及时引导学生,引入适当的数学记号,不妨,我们把所求极限中的数列记为  $x_n$ , 我们的目的是要证明  $x_n \rightarrow 9$ . 怎么证明呢?根据夹逼原理,我们必须构造两个数列  $y_n$  和  $z_n$ , 它们能把  $x_n$  夹在中间,即  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 并且它们具有共同的极限9,即  $y_n \rightarrow 9, z_n \rightarrow 9$ . 这样,我们就把证明极限  $x_n \rightarrow 9$  的问题,转化为如何构造这两个数列  $y_n$  和  $z_n$  的问题.

## 5 证明函数不等式的逆向思维教学法

例2:设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内二阶可导,且  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ , 证明  $\forall x_1 > 0, x_2 > 0$ , 有  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ .

这是一道未知函数表达式,仅知函数导数性质的证明题,而且有一定难度,需要多次的逆向思维分析,才能找出证明的思路.

1. 启发逆向思维:教师应该让学生明白,证明函数不等式的基本方法是利用函数的单调性.

2. 逆向思维的关键:要证明函数的单调性,首先需构造一个辅助函数,然后求导数,判断函数的增减性,这两个问题都是证明本题的关键.

3. 逆向思维转化:如何构造辅助函数呢?分析欲证不等式  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$  的,它有两个具有任意性的  $x_1$  和  $x_2$ , 这给我们的证明带来不小的困难.我们不妨将其中一个暂时固定,让另一个自由变化.比如,暂时固定  $x_2$ , 把  $x_1$  改成  $x$ , 令  $F(x) = f(x + x_2) - f(x)$ , 作为辅助函数.求得  $F'(x) = f'(x + x_2) - f'(x)$ , 然而,我们很难判断该表达式

是  $\geq 0$  还是  $\leq 0$ ?

4. 逆向思维深入: 再次进行逆向分析, 表达式  $f'(x+x_2) - f'(x)$  表示函数  $f(x)$  的导数在  $x$  与  $x+x_2$  两点处的函数值之差, 回顾拉格朗日微分中值定理, 有  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ , 其中  $\xi \in (a, b)$ . 于是有  $f'(x+x_2) - f'(x) = f'(\xi)[(x+x_2) - x]$ , 回到步骤 3, 我们就可以判断辅助函数  $F(x)$  的增减性了.

5. 完成本题的证明: 令  $F(x) = f(x+x_2) - f(x)$ , 其中  $x, x_2 > 0$ , 求导数得  $F'(x) = f'(x+x_2) - f'(x)$ , 由题设知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内二阶可导, 所以导函数  $F'(x) = f'(x+x_2) - f'(x)$  在  $[x, x+x_2]$  上连续, 在  $(x, x+x_2)$  内可导, 于是, 根据拉格朗日微分中值定理, 至少存在一点  $\xi \in (x, x+x_2)$ , 使得

$F'(x) = f'(x+x_2) - f'(x) = f''(\xi)[(x+x_2) - x] = f''(\xi)x_2 < 0$ . 所以  $F(x)$  在  $[x, x+x_2]$  上  $\downarrow$ , 从而有  $F(x) < F(0)$ , 即  $f(x+x_2) - f(x) = f(0+x_2) - f(0) = f(x_2)$ . 由  $x$  的任意性, 可将  $x$  换成  $x_1$ , 即得欲证不等式  $f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ . 其中  $x_1 > 0, x_2 > 0$ .

#### 参考文献:

- [1] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [2] 李成章, 黄玉民. 数学分析[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [3] [美]G 波利亚著, 李心灿, 王日爽, 李志尧译. 数学与猜想[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

## Educational method of inverse thought in mathematical proof

WANG Bin

(Institute of Mathematics and Applied Mathematics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** In this paper we introduced the concept of inverse thought educational method in mathematical proof, analysed its logical structure in mathematical proof, studied the dialectical relation of thoughtful training and ability development, listed some classical examples about training and developing mathematical inverse thought.

**Key words:** higher mathematics; mathematical thought; inverse thought; ability development