第24卷 第2期 重庆交通学院学报 2005年4月
Vol.24 No.2 JOURNAL OF CHONGQING JIAOTONG UNIVERSITY Apr.,2005

# 非扩张型映象的近似耦合不动点与耦合不动点定理

廖正琦

(重庆交通学院 基础科学部,重庆 400074)

**摘要**:在具有 Opial 条件的 Banach 空间中获得了非扩张映象的近似耦合不动点和耦合不动点存在定理.

**关 键 词**:Banach 空间;弱紧凸;非扩张映象;耦合不动点

**中图分类号**:O177 **文献标识码**:A **文章编号**:1001-716X(2005)02-0153-02

自 1987 年 Guo Dajun G. Lkshmikanthan[1] 提出了混合单调映象及其耦合不动点概念以来,虽然国内外许多作者对这一课题在理论和应用上都进行了广泛的研究[2-4],但基本上都是在半序 Banach 上展开讨论.由于半序的限制,使得在理论上的深入和应用上的拓广都造成诸多不便.本文完全取消了 Banach 空间半序的限制,引入二元非扩张映象近似耦合不动点的概念,并把文献[5]中的 opial 条件推广到积空间上去,以此为工具,用近似耦合不动点逼近不动点,获得了一般的 Banach 空间中非扩张映象的耦合不动点的存在性定理,推广了已有的结果.

设 $X$ 为 Banach 空间,在 $X\times X$ 中引入通常的线性运算,并定义范数

$$\|(x,y)\|_p=(\|x\|^p+\|y\|^p)^{1/p}$$

$$(1\leqslant p\leqslant+\infty) \tag{1}$$

可使 $X\times X$ 成为 Banach 空间,记为 $(X\times Y)_p$. 令 $T(x,y)=(A(x,y),A(y,x))$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists(x(\varepsilon),y(\varepsilon))\in(X\times X)_p$, 使得 $\|T(x(\varepsilon),y(\varepsilon))-(x(\varepsilon),y(\varepsilon))\|_p<\varepsilon$,则称 $(x(\varepsilon),y(\varepsilon))$ 为 $A$ 的 $\varepsilon$ - 近似耦合不动点(或 $T$ 的 $\varepsilon$ - 近似不动点).称 $(X\times X)_p$ 满足 Opial 条件,如果对任一弱收敛于 $(x_0,y_0)\in(X\times X)_p$ 的序列 $\{(x_n,y_n)\}$,都有 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|(x_0,y_0)-(x_n,y_n)\|_p<\liminf\limits_{n\to\infty}\|(x,y)-(x_n,y_n)\|_p$,

$$\forall(x,y)\in(X\times X)_p,(x,y)\neq(x_0,y_0)$$

**引理1** 设 $X$ 为 Banach 空间,$A:(X\times X)_p\to X$ 是压缩映象,则 $A$ 在 $(X\times X)_p$ 中存在唯一耦合不动点 $(x^*,y^*)$,且 $\forall(x_0,y_0)\in(X\times X)_p$ 迭代列 $\{(x_n,y_n)\}$ 都收敛于 $(x^*,y^*)$,其中,$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})$,$y_n=A(y_{n-1},x_{n-1})$,$(n=1,2,\cdots)$

证 设 $T(x,y)=(A(x,y),A(y,x))$,由 $A$ 的压缩性易证(略).

**引理2** 设 $X$ 为 Banach 空间,$G\subset X$ 是非空有界闭凸集,$A:G\times G\to G$ 是压缩常数为 $h\in(0,1)$ 的压缩映象,若存在 $(x_0,y_0)\in G\times G$,使得

$$\|T(x_0,y_0)-(x_0,y_0)\|<K(G\times G)(1-h)/2 \tag{2}$$

其中,$T(x,y)=(A(x,y),A(y,x))$,$K(G\times G)=\inf\{\|P_1-P_2\|,\forall P_1,P_2\in\partial(G\times G)\}>0$ 则 $A$ 在 $G\times G$ 中有耦合不动点.

证 设 $r=K(G\times G)/2$,则开球 $B((x_0,y_0),r)\subset G\times G$,由式(2),$\forall\varepsilon<r$,使得 $\|T(x_0,y_0)-(x_0,y_0)\|\leqslant(1-h)\varepsilon<(1-h)r$,从而 $\forall(x,y)\in\bar{B}((x_0,y_0),\varepsilon)$,由 $T$ 的压缩性有

$$\|T(x,y)-(x_0,y_0)\|\leqslant\|T(x,y)-T(x_0,y_0)\|+\|T(x_0,y_0)-(x_0,y_0)\|$$
$$\leqslant h\|(x,y)-(x_0,y_0)\|+(1-h)\varepsilon$$
$$\leqslant h\varepsilon+(1-h)\varepsilon=\varepsilon$$

又由 $\bar{B}((x_0,y_0),\varepsilon)$ 的完备性,根据引理1,存在 $(x^*,y^*)\in\bar{B}((x_0,y_0),\varepsilon)$ 使 $T(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$,即 $x^*=A(x^*,y^*)$,$y^*=A(y^*,x^*)$. 引理2得证.

**注1** 引理1,引理2分别推广了文献[4]中的定理5.1-2和定理5.1-4的结果.

**定理1** 设 $G$ 是 Banach 空间 $X$ 中的非空有界闭凸集,$A:G\times G\to G$ 是非扩张映象,则 $\forall\varepsilon>0$,$A$

收稿日期:2004-03-30
作者简介:廖正琦(1957-),男,重庆市垫江人,副教授,主要从事泛函分析,教学法等科研工作.

在 $G\times G$ 中存在 $\varepsilon$ - 近似耦合不动点.

证 设 $T(x,y)=(A(x,y),A(y,x))$,由条件 $\exists(x_0,y_0)\in G\times G$ 及 $R>0$,使 $B((x_0,y_0),R)\subset G\times G$,且 $\forall\varepsilon:0<\varepsilon/R<1$,则映象 $(1-\varepsilon/R)T$ 是压缩的,根据引理2,$(1-\varepsilon/R)T$ 在 $G\times G$ 中有不动点 $(x(\varepsilon),y(\varepsilon))$,于是

$\|T(x(\varepsilon),y(\varepsilon))-(x(\varepsilon),y(\varepsilon))\|=\|T(x(\varepsilon),y(\varepsilon))-(1-\varepsilon/R)T(x(\varepsilon),y(\varepsilon))\|=\|T(x(\varepsilon),y(\varepsilon))\|\varepsilon/R<\varepsilon$

即 $(x(\varepsilon),y(\varepsilon))$ 为 $A$ 的 $\varepsilon$ - 近似耦合不动点.

**定理2** 设 $X$ 是满足Opial条件的Banach空间,$C\subset X$ 是非空弱紧凸集,$A:C\times C\to C$ 是非扩张映象,则 $A$ 在 $C\times C$ 中有耦合不动点.

证 设 $T(x,y)=(A(x,y),(y,x))$,由 $X$ 满足Opial条件,则按式(1)定义的范数,显然 $(X\times X)_p$ 也满足Opial条件.事实上,设 $\forall\{(x_n,y_n)\}\subset(X\times X)_p$,且 $(x_n,y_n)$ 弱收敛于 $(x_0,y_0)\in(X\times X)_p$,则易知 $x_n$ 弱收敛于 $x_0$,$y_n$ 弱收敛于 $y_0$,由于 $X$ 满足Opial条件,则有

$\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_0-x_n\|<\liminf\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|\quad\forall x\neq x_0$, $\liminf\limits_{n\to\infty}\|y_0-y_n\|<\mathrm{l}\liminf\|y-y_0\|\ \forall y\neq y_0$

由此并利用式(1),得

$\liminf\limits_{n\to\infty}\|(x_0,y_0)-(x_n,y_n)\|_p=\liminf\limits_{n\to\infty}(\|x_0-x_n\|^p+\|y_0-y_n\|^p)^{1/p}<\liminf\limits_{n\to\infty}(\|x-x_n\|^p+\|y-y_n\|^p)^{1/p}\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|(x,y)-(x_n,y_n)\|_p$, $\forall(x,y)\neq(x_0,y_0)$

即 $(X\times X)_p$ 具备Opial条件.

$C\times C\subset(X\times X)_p$ 弱紧凸,则 $C\times C$ 必包含一个有界闭凸集 $K$,使 $T$ 在 $K\subset C\times C$ 满足定理1的条件,根据定理1,$\forall n\in N$,$T$ 在 $K\subset(X\times X)_p$ 存在 $1/n$ - 近似耦合不动点序列 $\{(x_n,y_n)\}$,使得 $\|T(x_n,y_n)-(x_n,y_n)\|_p<1/n$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T(x_n,y_n)-(x_n,y_n)\|_p=0$,由 $C\times C$ 的弱紧性,不妨设 $(x_n,y_n)$ 弱收敛于 $(x^*,y^*)\in C\times C$.

我们证明 $T(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$,用反证法.若 $T(x^*,y^*)\neq(x^*,y^*)$,由 $A$ 的非扩张及 $(X\times X)_p$ 的Opial条件有

$\liminf\limits_{n\to\infty}\|T(x^*,y^*)-(x^*,y^*)\|\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|_p<\liminf\limits_{n\to\infty}\|T(x^*,y^*)-(x_n,y_n)\|\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|T(x^*,y^*)-T(x_n,y_n)\|_p$

矛盾,故 $T(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$ 即 $x^*=A(x^*,y^*)$,$y^*=A(y^*,x^*)$.定理2得证.

**参考文献:**


[1] Dajun G. Lkshmikantham[J] V. Nonlinear Anal 1987,(11):623-632.

[2] Zhang Zhitao. New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications[J]. J Math Anal Appl, 1996,204(1):307-319.

[3] Guo Dajun. Fixed points of mixed monotone operators with applications[J]. Appl Anal,1988,31(3):215-224.

[4] E. Kveyszing. Introductory Functional Analysis With Application Copyright c[J]. by John Wiley & sons. Inc, 1978:183-196.

[5] Opial. Weal Convergence of the sequence of successve approximations for nonexpansive mappings, Bull[J]. Amer. Math. Soc,1967 23:591-597.


# Approximations couple fixed point and couple fixed point theorems for nonexpansive mappings


LIAO Zheng-qi

(Department of Basic Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074,China)



**Abstract**: In this paper, we have obtained approximations couple fixed point of nonexpansive mappings and the existence theorems of coupled fixed point in Banach space of opical condition.



**Key words**: Banach space; weakly compact convex; nonexpansive mappings; coupled fixed point